

Criterio de Pringsheim

Es bastante frecuente, en el criterio de comparación por límite, la comparación con la serie de Riemann. Este proceso se podría mecanizar con el siguiente criterio llamado *criterio del producto* o de *Pringsheim*.

TEOREMA 1 Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos positivos y sea L_p el límite

$$L_p = \lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha \cdot a_n$$

(1) Si L_p es finito y no nulo, entonces se tendrá que:

- Si $\alpha > 1$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente
- Si $\alpha \leq 1$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente

(2) Si $L_p = 0$ y $\alpha > 1$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ será convergente.

(3) Si $L_p = +\infty$ y $\alpha \leq 1$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ será divergente.

COMENTARIO 1 Es curioso que este teorema, como tal, no aparezca en las referencias bibliográficas más importantes de series infinitas (en ninguna de las clásicas). Sin embargo, en los textos de análisis matemático españoles si aparece, y dándole la paternidad del teorema a Pringsheim. En los países de habla francesa es conocido como *criterio de Riemann*. He rebuscado en la bibliografía de Pringsheim, sin éxito. ¿Usted conoce el teorema, y la paternidad de dicho teorema? ¿El artículo donde aparezca inicialmente?

Criterio de Schlömilch

El siguiente criterio, que no difiere esencialmente del *criterio de Raabe-Duhamel*, propuesto por el matemático Alemán Oscar Xavier Schlömilch, permite estudiar la convergencia de ciertas series en las que el *criterio del cociente* resulta inoperante y el de *Raabe-Duhamel* poco práctico.

TEOREMA 2 Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos positivos, y sea

$$L_s = \lim_{n \rightarrow \infty} n \ln\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$$

Entonces, se verifica que:

1. Si $L_s < -1$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente
2. Si $L_s > -1$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente
3. Si $L_s = -1$, nada sabemos sobre el carácter de la serie.

COMENTARIO 2 *El profesor K. Knopp, en pág. 287 de [8], afirma que este criterio es debido a Schlömilch, aunque no aporta la referencia bibliográfica original del teorema. He realizado dos pruebas diferentes de este teorema, y me gustaría conocer la paternidad de dicho teorema. ¿Usted conoce el teorema, y la paternidad de dicho teorema?.*

Criterio logarítmico de Schlömilch

En el caso de que el *criterio de convergencia de Schlömilch* no sea concluyente, o sea, si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \right) = -1$$

surge la necesidad de algún nuevo criterio que sean aún más sensible. El siguiente criterio, conocido como *segundo criterio de Schlömilch* o *criterio logarítmico de Schlömilch*, puede ser útil.

TEOREMA 3 *Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos positivos, y sea*

$$L_{ls} = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(n) \left(n \ln \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \right) + 1 \right)$$

Entonces, se verifica que:

1. *Si $L_{ls} < -1$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente*
2. *Si $L_{ls} > -1$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente*
3. *Si $L_{ls} = -1$, nada sabemos sobre el carácter de la serie.*

COMENTARIO 3 *Este teorema lo encontré como ejercicio propuesto, con el nombre de “Criterio logarítmico superior” con la formulación*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(n) \left(n \ln \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} \right) - 1 \right)$$

*sin prueba y sin paternidad. He reformulado el enunciado y realizado una prueba de este teorema. De forma totalmente provisional, he tomado la decisión de denominarlo como *segundo criterio de Schlömilch* o *criterio logarítmico de Schlömilch*. Este criterio es otra gran incógnita, respecto a su paternidad.*

COMENTARIO 4 *En la formulación de los criterios de Schlömilch he decidido usar por coherencia, con la formulación dada en el criterio del D’Alembert,*

el cociente $\frac{a_{n+1}}{a_n}$, tal y como propone el profesor K. Knopp, en lugar del cociente $\frac{a_n}{a_{n+1}}$, propuesto por el profesor T.J. Bromwich. En cualquier caso, la utilización de uno u otro cociente, no supone ningún cambio sustancial en el criterio de convergencia aunque si cambian las condiciones relacionadas con el valor del límite calculado.

Me encuentro con textos, donde para el criterio de D'Alembert utilizan $\frac{a_{n+1}}{a_n}$, y sin embargo para el criterio de Raabe-Duhamel utilizan el otro cociente $\frac{a_n}{a_{n+1}}$, lo cual supone, en mi opinión un "cierto grado de incoherencia". Agradecería su opinión sobre la utilización de uno u otro formato para el cociente.

COMENTARIO 5 *Le adjunto al final del pdf algunas de las referencias bibliograficas que estoy utilizando.*

Bibliografía

- [1] BHATNAGAR, P.L. Y SRINIVASIENAGR, C.N.
The theory of infinite series
National Publishing House, 1964
- [2] BONAR, D.D. , KHOURY, M.J.
Real Infinite Series
MAA, Washington, 2006
- [3] BROMWICH, T.J.
An Introduction to the theory of infinite series
Chelsea Publishing, 3^a Ed, 1991
- [4] DE BURGOS, J.
Cálculo Infinitesimal de una variable
Mac-Graw-Hill, 1995
- [5] EL AMRANI, M.
Suites et séries numériques. Suites et séries de fonctions
Ellipses, 2011
- [6] HEINBOCKEL, J.H.
Introduction to Finite and Infinite Series and Related Topics
Trafford Publishing, 2010
- [7] HYSLOP, J. M.
Infinite Series
Dover Publications Inc., 2009

- [8] KNOPP, K.
Theory and Application of Infinity Series
Dover Publication, Inc., 1990
- [9] KUNTZMANN, J.
Séries
Hermann, cop. 1967
- [10] LEITHOLD, L.
El Cálculo - EC7
Oxford University Press, 1998
- [11] MORENO, LUIS F.
An Invitation to Real Analysis
MAA Textbooks, 2015.
- [12] PIZA VOLIO, E.
Introducción al Análisis real en una variable
Editorial de la Universidad de Costa Rica, 2003
- [13] PONNUSAMY, S.
Foundations of Mathematical Analysis
Birkhäuser, 2012
- [14] PRINGSHEIM, A.
Allgemeine Theorie der Konvergenz und Divergenz von Reihen mit positiven Gliedern
Mathematische Annalen, vol. 35, pág. 297-394, 1890
<http://www.digizeitschriften.de/dms/img/?PID=GDZPPN002252155>
- [15] PRINGSHEIM, A.
Ueber die Multiplication bedingt convergenter Reihen
Mathematische Annalen - vol. 21, pág. 327-378, 1883
<http://www.digizeitschriften.de/dms/img/?PID=GDZPPN002247321>
- [16] PRUS-WIŚNIEWSKI, F.
Comparison of Raabe's and Scholömilch's test
Tatra Mt. Math. Publ. 42 (2009), 119-130

- [17] RANKIN, ROBERT A.
An Introduction to Mathematical Analysis
Pergamon Press, 1963
- [18] REY PASTOR, J., PL, P., TREJO, C.A.
Análisis Matemático. Vol 1.
Kapelusz, 1969
- [19] SHARMA, J.N. Y OTROS
Infinite Series
Krishna Prakashan Media, 2011
- [20] SMAIL, LLOYD LEROY
Elements of the theory of infinite processes
McGraw-Hill book company, inc., 1923
- [21] STEWART, J.
Cálculo con geometría analítica
Grupo editorial Iberoamericana, 1994
- [22] STROMBERG, K. R.
An Introduction to Classical Real Analysis
Wadsworth, Pacific Grove, 1981
- [23] TAKEUCHI, Y.
Sucesiones y Series. Tomos I y II
Limusa, 1986
- [24] THOMAS G.B. JR., FINNEY R.L.
Cálculo con geometría analítica
Addison-Wesley Iberoamericana, 6ª ed., 1998
- [25] VOROBIOV, N.N.
Teoría de las Series. Parte I y II
Mir-Rubiños, 1994.
- [26] WHITTAKER, E. T., WATSON, G. N.
A Course of Modern Analysis
Cambridge University Press, 1965