

Sobre una generalización del criterio logarítmico de Cauchy

M.A. Ramirez Sansano

18 de junio de 2018

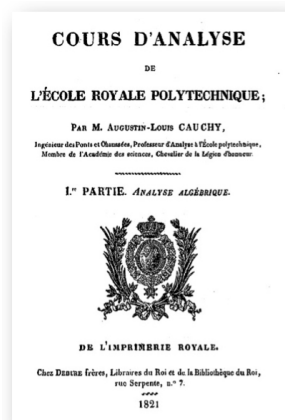
Resumen

Entre las técnicas para determinar la convergencia de una serie, el criterio logarítmico de Cauchy permanece relativamente desconocido para una parte importante de los matemáticos. Analizamos la causa de esta anomalía, presentamos el criterio original de Cauchy así como una generalización, propuesta del autor, basada en la comparación con la serie de Bertrand.

1. Revisión del criterio logarítmico de Cauchy

1.1. La teoría de las series y Cauchy

En 1821, Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), publicaba el libro *Cours d'Analyse de l'Ecole Royale Polytechnique. 1 Partie. Analyse Algébrique*, uno de los libros de matemáticas más influyentes jamás escritos.



El libro consta de 576 páginas y se compone de unos preliminares, doce capítulos y nueve apéndices titulados como notas. Cauchy no solo proporcionó una definición práctica de los límites y un medio para convertirlos en la base de una teoría rigurosa del cálculo, sino que también revitalizó la idea de que todas las matemáticas podrían establecerse sobre bases tan rigurosas.

Con Cauchy se precisan los conceptos de función, de límite y de continuidad en la forma actual o casi actual, tomando el concepto

de límite como punto de partida del análisis y eliminando de la idea de función toda referencia a una expresión formal, algebraica o no, para fundamentarla sobre la noción de correspondencia. Los conceptos aritméticos otorgan ahora rigor a los fundamentos del análisis. Gracias a Cauchy, el análisis infinitesimal adquiere bases sólidas.

Como bien indican los profesores Pérez Fernández y Aizpuru en [1], se puede considerar que Cauchy es el fundador de la teoría de convergencia de series, por ser el que realiza el primer planteamiento sistemático, extensivo y en profundidad del tema, incluyendo la enunciación y demostración de numerosos criterios de convergencia. En efecto, lo que Cauchy hace con sus criterios es establecer condiciones suficientes de convergencia, bajo ciertas hipótesis, independientemente de la expresión concreta del término general de la serie y sin conocer el valor de la suma de ésta.

El Cours d'Analyse de Cauchy contiene el estudio de series en los capítulos VI, dedicado a las series de números reales; en el IX, dedicado a las series de números complejos; en el XII, dedicado a las series recurrentes; y en la Nota VII, dedicada a las series dobles.

Como bien indican los profesores Pérez Fernández y Aizpuru en [1], se puede considerar que Cauchy es el fundador de la teoría de convergencia de series, por ser el que realiza el primer planteamiento sistemático, extensivo y en profundidad del tema, incluyendo la enunciación y demostración de numerosos criterios de convergencia. En efecto, lo que Cauchy hace con sus criterios es establecer condiciones suficientes de convergencia, bajo ciertas hipótesis, independientemente de la expresión concreta del término general de la serie y sin conocer el valor de la suma de ésta.

En la literatura matemática española suele aparecer el siguiente criterio como criterio logarítmico,

TEOREMA 1 Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos positivos y supongamos que

$$L_l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(\frac{1}{a_n}\right)}{\ln(n)}$$

Entonces, se verifica que:

1. Si $L_l < 1$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente
2. Si $L_l > 1$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.
3. Si $L_l = 1$, nada sabemos de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Este teorema, resulta de aplicar el criterio de comparación de Gauss tomando como referencia la serie armónica generalizada o de Riemann $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$. Para una prueba y una amplia gama de ejercicios puede consultarse [X].

Este criterio fue propuesto por A. Cauchy en el capítulo VI, apartado §II, páginas 125-127, en su Cours d'Analyse, por lo cual debería llamarse *criterio logarítmico de Cauchy*. Es curioso que este criterio no aparezca en ninguno de los textos clásicos de series infinitas, lo cual conlleva que sea desconocido para muchos matematicos.

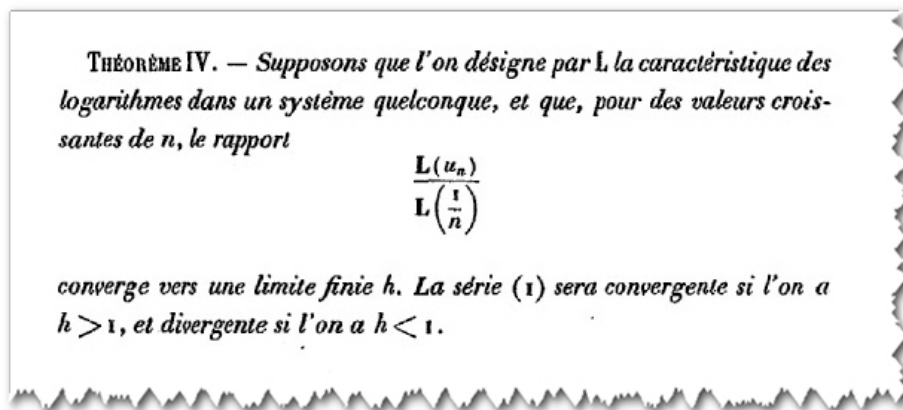
1.2. Una pequeña anomalía

Ninguno de los textos clásicos sobre "series infinitas" lo presentan, y aquellos que lo hacen no le añaden el adjetivo "de Cauchy".

1.3. El criterio original de Cauchy

Se reproduce a continuación las páginas del criterio propuesto originalmente por Cauchy en¹ su Cours d'analyse" de 1821.

Este criterio fue propuesto por A. Cauchy en el capítulo VI, apartado §II, páginas 125-127, en su Cours d'Analyse, por lo cual debería llamarse *criterio logarítmico de Cauchy*.



Puesto que

$$\frac{\log(u_n)}{\log\left(\frac{1}{n}\right)} = \frac{\log(u_n)}{-\log(n)} = \frac{-\log(u_n)}{\log(n)} = \frac{\log\left(\frac{1}{u_n}\right)}{\log(n)}$$

¹Puede encontrarse en la dirección web http://sites.mathdoc.fr/cgi-bin/oeitem?id=OE_CAUCHY_2_3_P5_0

2. Una generalización del criterio logarítmico

El objetivo de esta sección es generalizar el criterio logarítmico de Cauchy, cambiando la serie de referencia $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ por la serie de Bertrand

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha} \ln^{\beta}(n)}$$

la cual converge si $\alpha > 1$ y $\beta > 0$ o bien $\alpha = 1$ y $\beta > 1$; para el resto de posibilidades la serie es divergente (véase pág. X de [3]).

2.1. El criterio

El siguiente criterio, propuesto por el autor, como una generalización del criterio logarítmico de Cauchy, recibe en nombre de *criterio logarítmico de Cauchy-Bertrand*.

TEOREMA 2 Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos positivos y supongamos que

$$L_{cb} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\ln(n^{\alpha} a_n)}{\ln(\ln(n))}$$

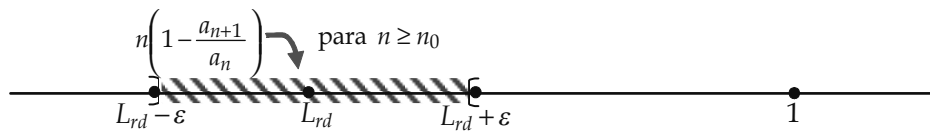
Entonces, se verifica que:

- (1) Si $L_{cb} < 1$ y $\alpha \leq 1$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ será divergente.
- (2) Si $L_{cb} > 1$ y $\alpha \geq 1$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ será convergente.

DEMOSTRACIÓN

(1) Probemos que si $L_{cb} < 1$ y $\alpha \leq 1$ la serie diverge.

Puesto que $\frac{-\ln(n^{\alpha} a_n)}{\ln(\ln(n))} \rightarrow L_{cb}$, tenemos asegurado que a partir de un cierto $n_0 \in \mathbb{N}$ todos los términos $\frac{-\ln(n^{\alpha} a_n)}{\ln(\ln(n))}$ caeran en el intervalo $]L_{cb} - \varepsilon, L_{cb} + \varepsilon[$ siendo $L_{cb} + \varepsilon < 1$, para un $\varepsilon > 0$ lo suficientemente pequeño



luego para todo $n \geq n_0$ se cumplirá que

$$\begin{aligned} \frac{-\ln(n^\alpha a_n)}{\ln(\ln(n))} = \frac{\ln\left(\frac{1}{n^\alpha a_n}\right)}{\ln(\ln(n))} < 1 &\iff \ln\left(\frac{1}{n^\alpha a_n}\right) < \ln(\ln(n)) \\ &\iff \frac{1}{n^\alpha a_n} < \ln(n) \\ &\iff \frac{1}{n^\alpha \ln(n)} < a_n \end{aligned}$$

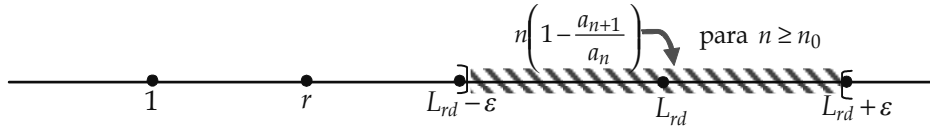
Puesto que la serie de Bertrand

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha \ln(n)}$$

al ser $\alpha \leq 1$, es divergente y minorante de $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$, tenemos asegurado, por el criterio de comparación de Gauss, que la serie $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ también será divergente.

(2) Probemos que si $L_{cb} > 1$ y $\alpha \geq 1$ la serie converge.

Elijamos un r tal que $1 < r < L_{cb}$. Puesto que $\frac{-\ln(n^\alpha a_n)}{\ln(\ln(n))} \rightarrow L_{cb}$, entonces tenemos asegurado que a partir de un cierto $n_0 \in \mathbb{N}$ todos los términos $\frac{-\ln(n^\alpha a_n)}{\ln(\ln(n))}$ caeran en el intervalo $]L_{cb} - \varepsilon, L_{cb} + \varepsilon[$ siendo $1 < r < L_{cb} - \varepsilon$, para un $\varepsilon > 0$ lo suficientemente pequeño



luego se cumplirá que

$$\begin{aligned} \frac{-\ln(n^\alpha a_n)}{\ln(\ln(n))} = \frac{\ln\left(\frac{1}{n^\alpha a_n}\right)}{\ln(\ln(n))} > r &\iff \ln\left(\frac{1}{n^\alpha a_n}\right) > r \ln(\ln(n)) \\ &\iff \ln\left(\frac{1}{n^\alpha a_n}\right) > \ln(\ln^r(n)) \\ &\iff \frac{1}{n^\alpha a_n} > \ln^r(n) \\ &\iff \frac{1}{n^\alpha \ln^r(n)} > a_n \end{aligned}$$

Puesto que la serie de Bertrand

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha} \ln^r(n)}$$

al ser $r > 1$ y $\alpha \geq 1$, es convergente y mayorante de $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$, tenemos asegurado, por el criterio de comparación de Gauss, que la serie $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ también será convergente.

■■■

2.2. Algunos ejemplos

EJEMPLO 1 *Estudiar el carácter de la siguiente serie numérica*

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln(\ln(n))}$$

Resolución

Dado que para $n \geq 3$ se tiene que $\frac{1}{n \ln(\ln(n))} > 0$, la series es de términos positivos. Analicemos el carácter de esta serie aplicando el *criterio logarítmico de Cauchy-Bertrand*

$$\begin{aligned} L_{cb} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\ln(n^{\alpha} a_n)}{\ln(\ln(n))} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\ln\left(n^{\alpha} \frac{1}{n \ln(\ln(n))}\right)}{\ln(\ln(n))} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\ln\left(n^{\alpha} \frac{1}{n \ln(\ln(n))}\right)}{\ln(\ln(n))} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\ln\left(\frac{1}{\ln(\ln(n))}\right)}{\ln(\ln(n))} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(\ln(\ln(n)))}{\ln(\ln(n))} \end{aligned}$$

Puesto que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

Podemos asegurar que $L_{cb} = 0 < 1$ y $\alpha = 1$, luego la serie es divergente.

■■■

EJEMPLO 2 Estudiar el carácter de la siguiente serie numérica

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n \ln(\ln(n))}}$$

Resolución

Dado que para $n \geq 3$ se tiene que $\frac{1}{\sqrt{n \ln(\ln(n))}} > 0$, la serie es de términos positivos. Analicemos el carácter de esta serie aplicando el *criterio logarítmico de Cauchy-Bertrand*

$$\begin{aligned} L_{cb} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\ln(n^\alpha a_n)}{\ln(\ln(n))} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\ln\left(n^\alpha \frac{1}{\sqrt{n \ln(\ln(n))}}\right)}{\ln(\ln(n))} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\ln\left(\sqrt{n} \frac{1}{\sqrt{n} \sqrt{\ln(\ln(n))}}\right)}{\ln(\ln(n))} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\ln\left(\frac{1}{\sqrt{\ln(\ln(n))}}\right)}{\ln(\ln(n))} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(\sqrt{\ln(\ln(n))}\right)}{\ln(\ln(n))} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2} \ln(\ln(\ln(n)))}{\ln(\ln(n))} \end{aligned}$$

Puesto que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

Podemos asegurar que $L_{cb} = 0 < 1$ y $\alpha = \frac{1}{2} \leq 1$, luego la serie es divergente.

**EJEMPLO 3** Estudiar el carácter de la siguiente serie numérica

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2 \ln^3(\ln(n))}$$

Resolución

Dado que para $n \geq 3$ se tiene que $\frac{1}{n^2 \ln^3(\ln(n))} > 0$, la serie es de términos positivos. Analicemos el carácter de esta serie aplicando el *criterio logarítmico*

de Cauchy-Bertrand

$$\begin{aligned}
L_{cb} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\ln(n^\alpha a_n)}{\ln(\ln(n))} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\ln\left(n^\alpha \frac{1}{n^2 \ln^3(\ln(n))}\right)}{\ln(\ln(n))} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\ln\left(n^{-\alpha} \frac{1}{n^2 \ln^3(\ln(n))}\right)}{\ln(\ln(n))} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\ln\left(\frac{1}{n \ln^3(\ln(n))}\right)}{\ln(\ln(n))} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(n \ln^3(\ln(n))\right)}{\ln(\ln(n))} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n) + \ln(\ln^3(\ln(n)))}{\ln(\ln(n))} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n)}{\ln(\ln(n))} + \frac{\ln(\ln^3(\ln(n)))}{\ln(\ln(n))}
\end{aligned}$$

Puesto que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\ln(x)} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

Podemos asegurar que $L_{cb} = +\infty > 1$ y $\alpha = 1$, luego la serie es convergente.



EJEMPLO 4 Estudiar el carácter de la siguiente serie numérica

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{n^{n+2} \ln^2(n)}$$

Resolución

Dado que para $n \geq 2$ se tiene que $\frac{(n+1)^n}{n^{n+2} \ln^2(n)} > 0$, la series es de términos

positivos. Analicemos el carácter de esta serie aplicando el *criterio logarítmico de Cauchy-Bertrand*

$$\begin{aligned}
L_{cb} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\ln(n^\alpha a_n)}{\ln(\ln(n))} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\ln\left(n^2 \frac{(n+1)^n}{n^{n+2} \ln^2(n)}\right)}{\ln(\ln(n))} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\ln\left(n^2 \frac{(n+1)^n}{n^2 n^n \ln^2(n)}\right)}{\ln(\ln(n))} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\ln\left(\frac{(n+1)^n}{n^n \ln^2(n)}\right)}{\ln(\ln(n))} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\ln\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \frac{1}{\ln^2(n)}\right)}{\ln(\ln(n))} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \ln^2(n)\right)}{\ln(\ln(n))} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right) + \ln(\ln^2(n))}{\ln(\ln(n))} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right) + 2 \ln(\ln(n))}{\ln(\ln(n))} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln\left(\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right)}{\ln(\ln(n))} + 2 \right)
\end{aligned}$$

Puesto que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right)}{\ln(\ln(n))} = \left[\frac{\ln(e^{-1})}{\infty} \right] = 0$$

Podemos asegurar que $L_{cb} = 2 > 1$ y $\alpha = 2 \geq 1$, luego la serie es convergente.

■ ■ ■

EJEMPLO 5 *Estudiar el carácter de la siguiente serie numérica*

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2 [\ln n]^{\ln(\ln(n))}}$$

Resolución

Dado que para $n \geq 2$ se tiene que $\frac{1}{n^2 [\ln n]^{\ln(\ln(n))}} > 0$, la serie es de términos positivos. Analicemos el carácter de esta serie aplicando el *criterio logarítmico de Cauchy-Bertrand*

$$\begin{aligned} L_{cb} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\ln(n^\alpha a_n)}{\ln(\ln(n))} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\ln\left(n^2 \frac{1}{n^2 [\ln n]^{\ln(\ln(n))}}\right)}{\ln(\ln(n))} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\ln\left(\frac{1}{[\ln n]^{\ln(\ln(n))}}\right)}{\ln(\ln(n))} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln\left([\ln n]^{\ln(\ln(n))}\right)}{\ln(\ln(n))} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(\ln(n)) \ln(\ln(n))}{\ln(\ln(n))} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(\ln(n)) = +\infty \end{aligned}$$

Podemos asegurar que $L_{cb} = +\infty > 1$ y $\alpha = 2 \geq 1$, luego la serie es convergente.

**EJEMPLO 6** *Estudiar el carácter de la siguiente serie numérica*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 [\ln(\ln n)]^{\ln(n)}}$$

Resolución

Dado que para $n \geq 2$ se tiene que $\frac{1}{n^2 [\ln(\ln n)]^{\ln(n)}} > 0$, la serie es de términos

positivos. Analicemos el carácter de esta serie aplicando el *criterio logarítmico de Cauchy-Bertrand*

$$\begin{aligned}
 L_{cb} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\ln(n^\alpha a_n)}{\ln(\ln(n))} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\ln\left(n^2 \frac{1}{n^2 [\ln(\ln n)]^{\ln(n)}}\right)}{\ln(\ln(n))} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\ln\left(\frac{1}{[\ln(\ln n)]^{\ln(n)}}\right)}{\ln(\ln(n))} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\ln\left(\frac{1}{[\ln(\ln n)]^{\ln(n)}}\right)}{\ln(\ln(n))} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln([\ln(\ln n)]^{\ln(n)})}{\ln(\ln(n))} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n) \ln(\ln(\ln n))}{\ln(\ln(n))}
 \end{aligned}$$

Puesto que

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \ln(\ln(x))}{\ln(x)} &= \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 \ln(\ln(x)) + \frac{1}{\ln(x)} \frac{1}{x} x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(\ln(x)) + \frac{1}{\ln(x)}}{\frac{1}{x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(\ln(x))}{\frac{1}{x}} + \frac{\frac{1}{\ln(x)}}{\frac{1}{x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \ln(\ln(x)) + \frac{x}{\ln(x)} \right) = [\infty + \infty] = +\infty
 \end{aligned}$$

Podemos asegurar que $L_{cb} = +\infty > 1$ y $\alpha = 2 \geq 1$, luego la serie es convergente.



EJEMPLO 7 Estudiar el carácter de la siguiente serie numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n}$$

Resolución

Dado que para $n \geq 2$ se tiene que $\frac{1}{n \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n} > 0$, la series es de términos

positivos. Analicemos el carácter de esta serie aplicando el *criterio logarítmico de Cauchy-Bertrand*

$$\begin{aligned}
L_{cb} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\ln(n^\alpha a_n)}{\ln(\ln(n))} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\ln\left(n \frac{1}{n\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n}\right)}{\ln(\ln(n))} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\ln\left(\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n}\right)}{\ln(\ln(n))} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n\right)}{\ln(\ln(n))} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(\left(\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}\right)}{\ln(\ln(n))} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} \ln\left(\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}\right)}{\ln(\ln(n))} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\ln(\ln(n))} \ln\left(\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}\right)
\end{aligned}$$

Es evidente que el límite del segundo factor es $\ln(e) = 1$. El límite del primer factor es

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{\ln(\ln(x))} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{\ln(x)} \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sqrt{x} \ln x = +\infty$$

Luego tenemos que $L_{cb} = +\infty > 1$ y $\alpha = 1$, luego la serie es convergente. ■■■

Referencias

- [1] CAUCHY, L.A.
Cours d'analyse
1821; in Oeuvres complètes d'Augustin Cauchy, series 2, vol. 3, Paris, Gauthier-Villars, 1899, pág. 125-127
Disponible digitalmente en <https://eudml.org/doc/183130>

- [2] PÉREZ FERNANDEZ, F. J., AND A. AIZPURU
El Cours d'Analyse de Cauchy
 SUMA, Num.30, pág. 5–25, 1999
- [3] RAMIREZ SANSANO, M.A.
Series Infinitas. Sucesiones y series numéricas
 El Autor, 2018
- [4] AITKEN, A.C.
On Bernoulli's numerical solution of algebraic equations
 Proc. Roy. Soc. Edinburgh, (1926), vol. 46, p. 289-305
- [5] ALONSO, A. Y BERMÚDEZ, T.
De conejos y números. La sorprendente sucesión de Fibonacci
 La Gaceta de la RSME, Vol.5, nº 1, págs. 175–196 (2002)
- [6] AMANN H., ESCHER J.
Analysis I
 Birkhäuser Basel; 1 edition (February 14, 2005)